周报

席若尧

西安电子科技大学
空间科学与技术学院

2020 年 3 月 12 日

为什么是 Maxwell 分布

建 议 改 名：为什么不是 Maxwell 分布

- 因为这是实验观察的结果！

为什么是 Maxwell 分布

建 议 改 名：为什么不是 Maxwell 分布

- 因为这是实验观察的结果！
- 这种解释不能令人满意。物理学中，只有将现实中的各种复杂现象还原 (reduction) 到基本定律的水平，才能得到一个解释。

平衡态

- 热力学第二定律 (Planck 表述)：封闭系统的总熵在任何过程中只能增加或维持不变。
- 由此可定义封闭系统的平衡态为总熵最大的状态。

平衡态中的能级分布

设各状态的集合为 S，函数 $\epsilon : S \to \mathbb{R}$ 将状态映射到其能量。考虑最大化其熵的概率分布 p：

$$\max H\{p\} = -\sum_{i \in S} p(i) \log p(i)$$

s.t

$$E = E\{p\} = \sum_{i \in S} p(i) \epsilon(i)$$

求最大分布

引入 Lagrange 乘子：

$$\mathcal{L}\{p\} = H\{p\} - \lambda(E - E\{p\})$$

求 $\mathcal{L}$ 的驻点：

$$\nabla_{p,\lambda}\mathcal{L} = 0$$

容易求得

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p(i)} = -\log p(i) - 1 + \lambda \epsilon(i)$$

Boltzmann 分布

我们不关心 $p(i)$ 的值 (由于没有引入约束条件 $\sum p(i)=1$ 实际上也无法求得)，只关心 $p(i)$ 和 $p(j)$ 的相对大小:

$$\log\frac{p(i)}{p(j)}=\log p(i)-\log p(j)=\lambda(\epsilon(i)-\epsilon(j))$$

即

$$\frac{p(i)}{p(j)}=e^{\lambda(\epsilon(i)-\epsilon(j))}$$

Boltzmann 引入常数 k 并定义热力学温度 T:

$$\lambda=-\frac{1}{kT}$$

则

$$\frac{p(i)}{p(j)}=e^{\frac{\epsilon(j)-\epsilon(i)}{kT}}$$

Maxwell 分布

状态 i 的总能量为 $\epsilon(i)$，我们假设粒子是质点，则其能量 E 都是平动动能。粒子处于速度 $v(i)$ 与 $v(j)$ 的状态 i 和 j 的相对概率就是

$$\frac{p(i)}{p(j)} = e^{\frac{m(v(j)^2 - v(i)^2)}{2kT}}$$

如果粒子不是质点，根据能量均分定理，其能量的一部分 αE 是平动动能 ($0 < \alpha < 1$ 是常数)，故总平动动能也是定值，上式仍然成立。

Maxwell 分布基于的假设

- 统计性
- 封闭系统
- 平衡态
- 能量均分定理

等离子体鞘套诊断方法

- 探针
- 发射和吸收光谱
- 电磁波 (微波/激光) 反射/透射

等离子体鞘套诊断方法

- 探针
- 发射和吸收光谱
- 电磁波 (微波/激光) 反射/透射

我们目前选择微波反射法进行探索。

微波反射法的难点

- 在聚变等离子体诊断领域，微波反射法实际上是一种十分成熟的的方法。
- 但是，在聚变等离子体诊断中，等离子体位于发射天线的远场区，其求解方法是根据平面波的传播推演的。
- 而在等离子体鞘套的问题中，等离子体位于发射天线近场区，且等离子体的厚度与微波波长是同一数量级，不能直接按平面波的反射进行处理。

可能的解决方案

- 将一般的微波反射法推广到近场、亚波长的情况
- 结合优化算法和 FDTD 计算，反演等离子体的参数
- 神经网络等黑盒方法

FDTD 简介

FDTD: Finite Difference Time-Domain，即时域有限差分。

微分方程的离散化

$$f\left(x_0+\frac{\delta}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^k\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)|_{x=x_0}$$

$$f\left(x_0-\frac{\delta}{2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^k(-1)^k\left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x)|_{x=x_0}$$

两个式子相加，得到

$$f(x_0+\frac{\delta}{2})-f(x_0-\frac{\delta}{2})=\delta f'(x_0)+\frac{2}{3!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 f'''(x_0)+\cdots$$

微分方程的离散化

移项，两边除以 δ，得

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{f(x_0+\frac{\delta}{2}) - f(x_0-\frac{\delta}{2})}{\delta} + \mathcal{O}(\delta^2)$$

例子：平面电磁波

$$\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}$$
$$\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}$$

用 $H_y^q[m]$ 表示 $q\Delta_t$ 时刻，x 坐标为 $m\Delta_x$ 的点处 H_y 的值，$E_z^q[m]$ 表示 $q\Delta_t$ 时刻，x 坐标为 $m\Delta_x$ 的点处 E_z 的值，用差商近似替代导数，得到

$$\mu\frac{H_y^{q+\frac{1}{2}}[m+\frac{1}{2}]-H_y^{q-\frac{1}{2}}[m+\frac{1}{2}]}{\Delta_t}=\frac{E_z^q[m+1]-E_z^q[m]}{\Delta_x}$$

$$\epsilon\frac{E_z^{q+1}[m]-E_z^q[m]}{\Delta_t}=\frac{H_y^{q+\frac{1}{2}}[m+\frac{1}{2}]-H_y^{q+\frac{1}{2}}[m-\frac{1}{2}]}{\Delta_x}$$

迭代方程

把时间最晚的项移到左边，剩下全移到右边，就得到迭代方程

$$H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m+\frac{1}{2}\right]=H_y^{q-\frac{1}{2}}\left[m+\frac{1}{2}\right]+\frac{\Delta_t}{\mu\Delta_x}(E_z^q[m+1]-E_z^q[m])$$

$$E_z^{q+1}[m]=E_z^q[m]+\frac{\Delta_t}{\epsilon\Delta_x}\left(H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m+\frac{1}{2}\right]-H_y^{q+\frac{1}{2}}\left[m-\frac{1}{2}\right]\right)$$

然后写个程序迭代就行了……

FDTD 的优缺点

- 优点：可以解决很复杂的问题
- 缺点：很慢

校程序设计竞赛

- 网络赛已经结束 (2020-05-17)
- 网络赛情况很不理想
- 现场赛预计推迟到下学期
- 部分题目讲解：`http://acm.xidian.edu.cn/2020-campus/online-editorial-xry.mp4`

电容层析

电容层析成像是一种非侵入式的过程层析成像技术，其根据测量区周围电极对的电容数据重建介质分布的可视化图像。

数学模型

设测量区周围有 N 个电极，则可以测得

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$

组电容数据。通过线性化、离散化和归一化，可以将介电常数的分布与极板间测得的电容联系起来：

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}\mathbf{g} + \mathbf{e}$$

其中 $\mathbf{S}$ 是灵敏度矩阵，$\mathbf{g}$ 为归一化介电常数分布向量，$\mathbf{c}$ 是归一化电容值，$\mathbf{e}$ 是测量噪声。一般来说，$\mathbf{g}$ 的元素个数远大于 $\mathbf{c}$ 的元素个数。

数学问题

给定 **c**、**S**，反算 **g**。注意由于 **g** 的元素个数远大于 **c** 的元素个数，这是一个欠定的线性反问题。

线性反投影算法

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}^T\mathbf{C}$$

- 优点：形式简单，容易计算
- 缺点：求解质量很差

Landweber 算法

$$\mathbf{g}_{k+1} = \mathcal{P}[\mathbf{g}_k + \alpha \mathbf{S}^T(\mathbf{c} - \mathbf{S}\mathbf{g}_k)]$$

其中，$\mathcal{P}$ 是阈值函数，α 是迭代系数。

- 优点：成像效果较好，一般较快
- 缺点：可能出现收敛性问题

正则化算法

$$\min \Phi(\mathbf{g}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{Sg} - \mathbf{c}\|^2 + \frac{1}{2}\mu\|\mathbf{Rg}\|^2$$

- 优点：图像重建效果好，没有伪像
- 缺点：慢，数值误差较大