西安電子科技大學 XIDIAN UNIVERSITY | 程序设计竞赛实训基地 Programming Contest Training Base

磁层结构

席若尧

西安电子科技大学空间科学与技术学院

2020 年 4 月 30 日

第 I 部分

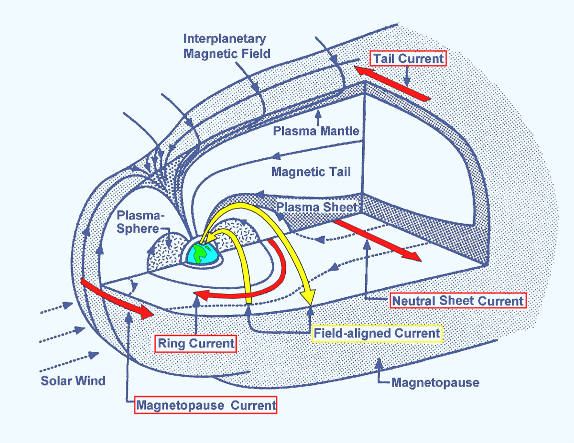
磁层的观测结果

地球磁场

- 地球磁场基本 (90%) 都是偶极场。
- 2020 年世界磁场模型 (WMM) 的数据为偶极子在磁赤道上产生的磁场 $B_0 = 30819nT$，偶极子方向相对于地球自转方向倾斜角为 $9.41°$。
- 除了偶极场外，还有地球本身的非偶极磁场，和磁层电流产生的磁场。

磁层中的电流

用右手螺旋定则可以直接确定环流产生的磁场方向。



图片来源：The US/UK World Magnetic Model for 2020-2025. doi: 10.25923/ytk1-yx35

地球近磁尾等离子体

- 尾瓣
- 等离子体片边界层
- 等离子体片

同步轨道

$$\omega^2 r = g \times \frac{R_E^2}{r^2}$$

$$\rightarrow r = \left(\frac{gR_E^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

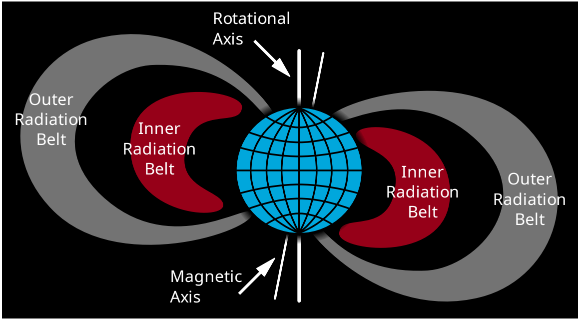
代入 $g = 9.8m/s^2$，$\omega = \frac{2\pi}{86400}s^{-1}$，$R_E = 6.4 \times 10^6 m$，得到

$$r = 4.2 \times 10^7 m \approx 6.6R_E$$

由于地理赤道面和地磁赤道面夹 $9.41°$ 角，同步轨道航天器的磁纬会在 $\pm 9.41°$ 之间变化。另外，由于太阳和磁层活动，等离子体片内边界的位置可能发生移动，导致航天器穿过等离子体片的边界。

Van Allen 带

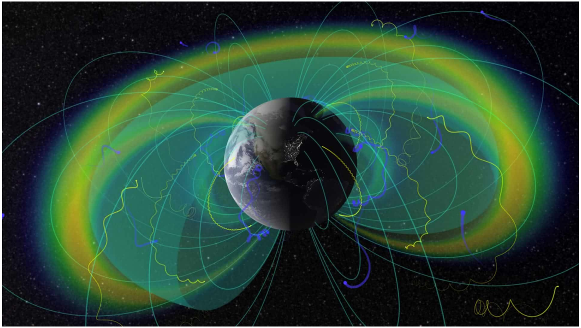
Van Allen 带包含被地球磁场束缚着的高能粒子。由于带电粒子在非均匀磁场中发生梯度漂移，电子向东环绕地球漂移，而阳离子向西环绕地球漂移。故形成自东向西的环形电流。



图片来源：NASA

等离子体层

等离子体层是位于几个地球半径高度的，密的、冷的 ($1eV$) 等离子体。



图片来源：NASA

电场和磁层对流

- 在理想电导率近似下，有 $\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$，故 $\mathbf{E}=-\mathbf{u}\times\mathbf{B}$。
- $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0$，因此电场沿磁力线是常数。如果已知磁场位形，且磁场不随时间变化，可以将电离层的电位分布直接映射到磁层。
- 但是这在实践中是相当困难的。

第 II 部分

带电粒子在稳恒电磁场中的运动

基本定律

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$$

粒子绕磁场线的旋转

设 $\mathbf{E}=0$，$\mathbf{B}$ 为匀强磁场，则

$$m\ddot{\mathbf{x}}=q\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{B}$$

加速度始终垂直于速度方向，且大小恒定，故粒子做圆周运动。其周期

$$t_c=\frac{2\pi}{\Omega_c}=\frac{2\pi m}{|q|B}\approx 0.66s\times\frac{100nT}{B}\times A$$

对于质子，$A=1$，对于电子，$A=1/1836$。圆周运动半径 (Larmor 半径)

$$\rho_c=\frac{m\dot{x}}{|q|B}\approx 46km\times\sqrt{A}\times\sqrt{\frac{T}{1keV}}\times\frac{100nT}{B}$$

$T=\frac{m\dot{x}^2}{2}$ 为动能。

绝热不变量

历史上，在许多领域，人们都在缓变系统中发现一些带有角动量量纲的物理量守恒。Ehrenfest 在研究缓变系统中热学定律和力学定律的联系时，发现了普遍的绝热不变量。

绝热不变量是分析力学的结论，因此有必要介绍分析力学的基本知识。Lagrange 力学将力学定律表述为：一力学系的运动是泛函

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{L} dt$$

的驻定曲线。$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathbf{x}(\mathbf{t}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}), t)$。数学上可以证明，如果 γ 满足 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

则该泛函取驻定曲线。

有势场中的运动

在有势场 (所有外力可以表示成势 V 的负梯度) 时，

$$\mathscr{L} = T - U = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - U$$

即动能与势能之差。此时

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla U$$

代入 E.-L. 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

得到

$$m\ddot{\mathbf{x}} + \nabla U = 0$$

电磁场中的粒子

只有静电场时，就是有势场的特例：

$$\mathscr{L} = T - q\phi$$

在有电磁场时，推广为

$$\mathscr{L} = T - q(\phi + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A})$$

其中 $\mathbf{A}$ 是磁矢势，磁感应强度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$，电场强度 $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$。

证明

把 Lagrange 量

$$\mathscr{L} = T - q(\phi + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A})$$

代入 E.-L. 方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

得

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}) + q\nabla\phi - q\nabla(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}) = 0$$

展开全导数和梯度运算，得

$$m\ddot{\mathbf{x}} + q\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q(\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla)\mathbf{A} + q\nabla\phi - q\dot{\mathbf{x}} \cdot (\nabla \mathbf{A})$$

关于符号的说明

方程

$$m\ddot{\mathbf{x}} + q\frac{\partial A}{\partial t} + q(\dot{\mathbf{x}}\cdot\nabla)A + q\nabla\phi - q\dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\mathbf{A})$$

中

$$\dot{\mathbf{x}}\cdot\nabla = \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$(\dot{\mathbf{x}}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \sum_j \mathbf{e_j} \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\mathbf{A}) = \sum_j \mathbf{e_j} \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

有用的矢量恒等式：

$$\nabla(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}) = \mathbf{P}\cdot(\nabla\mathbf{Q}) + \mathbf{Q}\cdot(\nabla\mathbf{P})$$

化简

$$
\begin{aligned}
&(\dot{\mathbf{x}}\cdot\nabla)\mathbf{A}-\dot{\mathbf{x}}\cdot(\nabla\mathbf{A})\\
&=\sum_j \mathbf{e_j}\sum_i \dot{x}_i\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)\\
&=\sum_j \mathbf{e_j}\sum_i \dot{x}_i(\nabla\times\mathbf{A})_k \qquad (\mathbf{e_k}=\mathbf{e_i}\times\mathbf{e_j},\mathbf{e_j}=\mathbf{e_k}\times\mathbf{e_i})\\
&=(\nabla\times\mathbf{A})\times\dot{\mathbf{x}}\\
&=B\times\dot{\mathbf{x}}
\end{aligned}
$$

有用的矢量恒等式

$$\mathbf{P}\times(\nabla\times\mathbf{Q})=\mathbf{P}\cdot(\nabla\mathbf{Q})-(\mathbf{P}\cdot\nabla)\mathbf{Q}$$

代回 E.-L. 方程

$$m\ddot{\mathbf{x}} + q(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{B}\cdot\dot{\mathbf{x}}) = 0$$

即

$$m\ddot{\mathbf{x}} = q(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B}) = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{B})$$

这就说明 $\mathscr{L}$ 是适用于电磁场中带电粒子运动的 Lagrange 量。我们称

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} + q\mathbf{A}$$

为广义动量。

Hamilton 力学

具有 Lagrange 量 $\mathscr{L}$ 的力学体系等价于具有 Hamilton 量

$$\mathscr{H}(\mathbf{p},\mathbf{x},t)=\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{x}}-\mathscr{L}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)$$

的 Hamilton 力学体系。其运动方程 (又称为正则方程) 为

$$\dot{\mathbf{p}}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{x}}$$

$$\dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\mathbf{p}}$$

其中 $\mathbf{p}$ 是广义动量

$$\mathbf{p}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}$$

对于电磁场中的粒子

$$\mathscr{H}=\frac{|\mathbf{p}-q\mathbf{A}|^2}{2m}+q\phi$$

Hamilton 量与能量

我们可以看出，Hamilton 量就是粒子在电磁场中的动能与电势能之和。一般地，Hamilton 量 $\mathscr{H}$ 就是用一组广义动量 $\mathbf{p}$，对应的广义坐标 $\mathbf{x}$，以及参数 λ 将系统能量表示出来：

$$E = \mathscr{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \lambda)$$

进行全微分，得

$$\dot{E} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$$

由正则方程，前两项相互抵消，即

$$\dot{E} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$$

参数 λ 缓变的系统

考虑一个系统，当 λ 不变时做严格周期运动 (例如均匀恒定磁场中环绕磁力线旋转的粒子，$\dot{\lambda} = \dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \partial \mathbf{A}/\partial t = 0$)。此时系统的能量是恒定的。设一个运动周期的轨迹为 Γ。我们考虑 $\dot{\lambda}$ 和 $\ddot{\lambda}$ 都很小的参数变化。在轨迹 Γ 上求能量的平均变化率：

$$\langle \dot{E} \rangle = \langle \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \rangle$$

因为 $\ddot{\lambda} \to 0$，可以近似认为 $\dot{\lambda}$ 不变，就能将它移出平均值算子：

$$\langle \dot{E} \rangle = \langle \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \lambda} \rangle \dot{\lambda}$$

化简

展开平均值算子:

$$\langle \dot{E} \rangle = \dot{\lambda} \frac{\int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} dt}{\int_0^T dt}$$

因为 $\dot{x} = \partial \mathcal{H} / \partial p$，得到

$$dt = \frac{dx}{\partial \mathcal{H} / \partial p}$$

即可将对时间的积分变为对坐标的积分

$$\langle \dot{E} \rangle = \dot{\lambda} \frac{\oint_\Gamma \frac{\partial \mathcal{H} / \partial \lambda}{\partial \mathcal{H} / \partial p} dx}{\oint_\Gamma \frac{dx}{\partial \mathcal{H} / \partial p}}$$

继续化简

为了消去 $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}$，在轨道 Γ 上某个固定的坐标 x 上考虑 p，此时它是 E 和 λ 的确定函数。而 E 和 λ 又是相互独立的定值，故

$$0 = \frac{dE}{d\lambda} = \frac{d\mathcal{H}}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

可知在轨道 Γ 上

$$\frac{\partial \mathcal{H}/\partial \lambda}{\partial \mathcal{H}/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}$$

代入积分方程

$$\langle \dot{E} \rangle = \dot{\lambda}\frac{\oint_\Gamma \frac{\partial \mathcal{H}/\partial \lambda}{\partial \mathcal{H}/\partial p} dx}{\oint_\Gamma \frac{dx}{\partial \mathcal{H}/\partial p}}$$

并化简，得到

$$\langle \dot{E} \rangle = -\dot{\lambda}\frac{\oint_\Gamma \frac{\partial p}{\lambda} dx}{\oint_\Gamma \frac{\partial p}{\partial E} dx}$$

最后的化简

两边同乘以分母，移项，得到

$$0=\oint_\Gamma\left(\frac{\partial p}{\partial E}\langle\frac{dE}{dt}\rangle+\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right)dx=\oint_\Gamma\left(\frac{dp}{dt}\right)dx$$

而

$$\frac{d}{dt}\oint_\Gamma p\,dx=\oint_\Gamma\left(\frac{dp}{dt}\right)dx+\oint_\Gamma\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)dt=0+0=0$$

因此在系统参数 λ 缓慢变化时，运动周期上的积分 $I=\oint p\,dx$ 近似保持不变。称 I 为绝热不变量。

第一绝热不变量

考虑带电粒子在近似均匀磁场中的回旋运动。磁矢势 $\mathbf{A}=xB\mathbf{e}_y$，可知磁场

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}=B\mathbf{e}_z$$

回旋运动角速度为

$$\Omega_c=\frac{qB}{m}$$

$A_x=0$，$\dot{x}=-v\sin(\Omega_c t)$，因此

$$\begin{aligned}I&=\oint pdx=\int_0^T(m\dot{x}+qA_x)\dot{x}dt\\&=\int_0^T mv^2sin^2(\Omega_c t)dt\\&=\Omega_c^{-1}mv^2\int_0^2 sin^2\theta d\theta\\&=\frac{\pi m^2v^2}{qB}\end{aligned}$$

磁矩

注意到

$$I = \frac{\pi m^2 v^2}{qB} = 2\pi \times \frac{m}{q} \times \frac{T}{B}$$

非相对论情况下 m 和 q 都是常量，只有 B 是可能缓慢变化的系统参数。此时回旋运动动能 T 必须随 B 变化，而它们的比值不变：

$$\frac{T}{B} = \text{const}$$

我们称这个比值为磁矩 μ。

粒子的弹跳运动

如果粒子除了垂直于 **B** 的速度 $v_\perp$ 外，还有平行于 **B** 的速度 $v_\parallel$，则它会在回转运动的同时，沿 **B** 的方向运动。如果在这一运动方向上 **B** 缓慢变化，则磁矩

$$\mu = \frac{T_\perp}{B}$$

是定值。另外，磁场无法对粒子做功，故总动能

$$T = T_\perp + T_\parallel = \frac{1}{2}m\left(v_\perp^2 + v_\parallel^2\right)$$

也是定值。当

$$B = \frac{T}{\mu}$$

时，$T = T_\perp$，故 $T_\parallel = 0$，此时粒子无法继续向前运动，会被弹回。

E × B 漂移

如果有垂直于 **B** 的磁场 **E**，则粒子会在同时垂直于 **B** 和 **E** 的方向漂移。

漂移速度

考虑系统中有匀强电场 $\mathbf{E}=E_x\mathbf{e}_x$，匀强磁场 $\mathbf{B}=B_y\mathbf{e}_y$，对应的势为

$$\phi=-E_x x$$

$$\mathbf{A}=-B_y x\mathbf{e}_z$$

由于 $(\mathbf{A},\phi)$ 是 Lorentz 协变的四维矢量，设某人以速度 $\mathbf{v}=v_z\mathbf{e}_z$ 匀速运动，在他的参考系中，场要进行 Lorentz 变换

$$A_z'=\gamma\left(A_z-\frac{v\phi}{c^2}\right)$$

$$\phi'=\gamma(\phi-v_z A_z)$$

低速情况下 $\gamma\approx 1$。存在某个 v_z 使得 $\phi'=0$，此时这个人只能看到磁场，因此在他看来粒子只有圆周运动，没有漂移运动。而在我们看来，粒子以速度 v_z 和他一起漂移。这个速度是

$$v_z=\frac{\phi}{A_z}=\frac{-E_x x}{-B_y x}=\frac{E_x}{B_y}$$

漂移速度

一般来说，漂移速度的大小是 $|\mathbf{E}|/|\mathbf{B}|$，而方向是 $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ 的方向。因此，可以写作

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2}$$

对于一般的恒定外力 F，F 的作用与强度为 $\frac{F}{q}$ 的电场等同，此时漂移速度为

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{q\mathbf{B}^2}$$

磁场梯度“力”

设一回旋的带电粒子在 ∇B 方向上有一虚位移 δx，且磁场缓慢变化。由于磁矩 μ 绝热不变，有

$$\mu = \frac{T_\perp}{B} = \frac{T_c + \delta T_c}{B + \delta B} = \frac{T_c + \delta T_c}{B + |\nabla B| \delta x}$$

化简得

$$\delta T_c = \frac{T_c |\nabla B| \delta x}{B}$$

由于磁场不能对粒子做功，有

$$\delta T = \delta T_c + \delta T_o = 0$$

即

$$\delta T_o = -\frac{T_c |\nabla B| \delta x}{B}$$

如果忽视粒子的回旋，将整个回旋轨道看作一个“准粒子”，则由 d’Alembert 原理，这个准粒子相当于受到磁场在 ∇B 反方向的力，大小为

$$F = \frac{|\delta T_o|}{\delta x} = \frac{T_c |\nabla B|}{B}$$

梯度漂移

将上面算出的 F 代入外力漂移速度公式，即得到梯度漂移速度

$$\mathbf{u} = \frac{T_c \mathbf{B} \times \nabla |B|}{q|\mathbf{B}|^3}$$

第 III 部分

简化的物理模型

小电流环的磁场

设 xy 平面上有一很小的，边长为 Δl 的正方形导线框，其中通有逆时针循环的电流 I，推导它产生的磁场。因为没有时变电场，则磁场唯一的源就是电流

$$\nabla^2\mathbf{A}=\frac{1}{\epsilon_0 c^2}\mathbf{J}$$

称小正方形的上边为 a，左边为 b，下边为 c，右边为 d，类比点电荷电势公式，可以写出四个电流元产生的矢势

$$A_x=\frac{I\Delta l}{4\pi\epsilon_0 c^2}(r_c^{-1}-r_a^{-1})$$

$$A_y=\frac{I\Delta l}{4\pi\epsilon_0 c^2}(r_b^{-1}-r_d^{-1})$$

其中 r_k 是测量场的点距下标为 k 的电流元的距离。

偶极近似

由于 $\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_a = \Delta l \mathbf{e}_y$，且 $\Delta l << 1$，有

$$
\begin{aligned}
r_c^{-1} - r_a^{-1} &\approx \frac{dr^{-1}}{dy}\Delta l \\
&= \frac{d}{dy}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}\Delta l \\
&= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} y\Delta l \\
&= -r^{-3} y\Delta l
\end{aligned}
$$

可得

$$A_x \approx -\frac{I(\Delta l)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} y$$

同理可得

$$A_y \approx +\frac{I(\Delta l)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} x$$

矢量场 A

将上面的结果组合成矢量形式

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}^x + A_y\mathbf{e}^y = \frac{I(\Delta l)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}(x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) = \frac{I(\Delta l)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$$

注意到电流环路的有向面积 $\Delta\mathbf{S} = (\Delta l)^2\mathbf{e}_z$，可以发现对于一般的环路法向，上述结果可以写成

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}\Delta\mathbf{S} \times \mathbf{r}$$

有用的矢量恒等式

$$\nabla(r^{-1}) = -r^{-3}\mathbf{r}$$

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \left(\Delta \mathbf{S} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\Delta \mathbf{S} \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) - (\Delta \mathbf{S} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right]$$

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$(\Delta \mathbf{S})_i \frac{d}{di} \frac{j}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3ij}{r^5} + \frac{\delta_{ij}}{r^3} \quad (i, j \in \{x, y, z\})$$

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{S} \cdot \nabla) \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \sum_j \mathbf{e}_j \sum_i (\Delta \mathbf{S})_i \left(-\frac{3ij}{r^5} + \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\Delta \mathbf{S}}{r^3} - r^{-5} \sum_j j\mathbf{e}_j \sum_i 3i(\Delta \mathbf{S})_i \\ &= \frac{\Delta \mathbf{S}}{r^3} - \frac{3}{r^5} (\Delta \mathbf{S} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \end{aligned}$$

偶极磁场强度

把所有的东西合在一起

$$\mathbf{B}=\frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[4\pi\delta(\mathbf{r})+\frac{3}{r^5}(\Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\frac{\Delta\mathbf{S}}{r^3}\right]$$

中括号内，第一项对于经典磁偶极子没有意义，因为偶极近似要求 $r>>\Delta l>0$，这一项只在量子力学系统中出现。在磁赤道面上又有 $\Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}=0$，故在磁赤道面远离场源的区域

$$\mathbf{B}=\frac{I\Delta\mathbf{S}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}$$

辐射带粒子的漂移

将地球磁场近似为磁偶极子，则磁赤道面上 $B=\frac{B_0 R_E^3}{r^3}$。显然其梯度方向指向地球中心，大小为

$$|\nabla \mathbf{B}| = -\frac{dB}{dr} = \frac{3B_0 R_E^3}{r^4}$$

B 指向北极，故阳离子的梯度漂移方向与 $\mathbf{B}\times\nabla\mathbf{B}$ 一致，为自东向西，电子则相反。其梯度漂移速度的大小为 (以自东向西为正)

$$v = \frac{TB\times|\nabla B|}{qB^3} = \frac{3TB_0^2 R_E^6 r^9}{qB_0^3 R_E^9 r^7} = \frac{3Tr^2}{qB_0 R_E^3}$$

带电粒子的运动相当于一个小电流元

$$I\Delta l = \frac{q}{\Delta t}\Delta l = qv = \frac{3Tr^2}{B_0 R_E^3}$$

环电流磁场

自西向东的环电流在地球中心产生南向磁场。一个向 y 方向，以速度 v_y 运动的粒子产生的矢势为

$$A_y = \frac{q v_y}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

它产生的磁场为 (以 x 方向为例)：

$$\begin{aligned} B_x &= -\frac{\partial A_y}{\partial z} \\ &= -\frac{q v_y}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\partial A_y}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{q v_y}{4\pi\epsilon_0 c^2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} z \\ &= \frac{q v_y}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{z}{r^3} \end{aligned}$$

环电流地心扰动

考虑地心时可以令 $z = r$，再代入

$$qv_y = \frac{3Tr^2}{B_0 R_E^3}$$

则在地心引起的磁场变化为 (北向为正):

$$\Delta B_{\text{shift}} = -\frac{3}{4\pi}\frac{T}{\epsilon_0 c^2 R_E^3 B_0}$$

回旋运动电流元

除了漂移运动外，辐射带粒子还有回旋运动。其电流

$$I = \frac{q}{t_c} = \frac{q}{2\pi/\Omega_c} = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

电流环面积

$$\Delta S = \pi r^2$$

故

$$I\Delta S = \frac{q^2 r^2 B}{2m}$$

注意到 $v_c = \Omega_c r = \frac{qBr}{m}$，可得

$$I\Delta S = \frac{m v_c^2}{2B} = \frac{T}{B} = \mu$$

可见回旋运动的电流元等于磁矩。

回旋运动磁场

代入 $B=\frac{B_0R_E^3}{r^3}$，得到

$$I\Delta S=\frac{Tr^3}{R_E^3B_0}$$

再代入磁偶极子场强公式，得回旋运动在地心引起的北向扰动

$$\Delta B_{\text{dipole}}=\frac{I\Delta S}{4\pi\epsilon_0c^2r^3}=\frac{1}{4\pi}\frac{T}{\epsilon_0c^2R_E^3B_0}$$

这会抵消漂移运动产生的一部分扰动，最终总的扰动是南向的：

$$\Delta B=\Delta B_{\text{shift}}+\Delta B_{\text{dipole}}=-\frac{1}{2\pi}\frac{T}{\epsilon_0c^2R_E^3B_0}$$

我们的推导过程是针对固定在赤道面上的粒子的，但是这个结论对于其他环电流粒子也适用。

偶极磁场能量

地球表面以上，地球偶极磁场的能量为

$$\int_{r\geq R_E}\frac{\epsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}dV$$

由于

$$\mathbf{B}=\frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{3}{r^5}(\Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-\frac{\Delta\mathbf{S}}{r^3}\right]$$

有

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}&=\left(\frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right)^2\left[\frac{9}{r^{10}}(\Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})+\frac{1}{r^6}(\Delta\mathbf{S}\cdot\Delta\mathbf{S})-\frac{6}{r^8}(\Delta\mathbf{S}\cdot\mathbf{r})^2\right]\\&=\left|\frac{I\Delta\mathbf{S}}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right|^2\left(\frac{3}{r^8}z^2+\frac{1}{r^6}\right)=\left|\frac{I\Delta\mathbf{S}}{4\pi\epsilon_0 c^2}\right|^2\left(\frac{1}{r^6}(1+3\cos^2\theta)\right)\end{aligned}$$

括号内第一项的积分为

$$\int_{r\geq R_E} r^{-6}dV = \int_{R_E}^{\infty} 4\pi r^2 dr\cdot r^{-6} = 4\pi\int_{R_E}^{\infty} r^{-4}dr = \frac{4\pi}{3R_E^3}$$

第二项的积分为

$$\begin{aligned}\int_{r\geq R_E} 3r^{-6}\cos^2\theta dV &= 3\int_{R_E}^{\infty} r^{-6}dr\int_0^{\pi} rd\theta\cdot\cos^2\theta\cdot 2\pi r\sin\theta \\ &= 6\pi\int_{R_E}^{\infty} r^{-4}dr\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta \\ &= -\frac{2\pi}{R_E^3}\int_1^{-1}\cos^2\theta d(\cos\theta) = \frac{4\pi}{3R_E^3}\end{aligned}$$

故

$$\int_{r\geq R_E}\frac{1}{r^6}(1+3\cos^2\theta)dV = \frac{8\pi}{3R_E^3}$$

放在一起

$$E_{\text{mag}} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_{r \geq R_E} |\mathbf{B}|^2 dV$$
$$= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left| \frac{I\Delta \mathbf{S}}{4\pi\epsilon_0 c^2} \right|^2 \cdot \frac{8\pi}{3R_E^3}$$
$$= \frac{|I\Delta \mathbf{S}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3}$$

而在地球表面

$$B_0 = \frac{|I\Delta \mathbf{S}|}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3}$$

故

$$|I\Delta \mathbf{S}| = 4\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3 B_0$$

代入 E_{mag} 的表达式，得

$$E_{\text{mag}} = \frac{4\pi\epsilon_0 c^2 B_0^2 R_E^3}{3}$$

D.-P.-S. 关系

一个粒子在地心产生的磁扰动是

$$\Delta B = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2}\frac{T}{R_E^3 B_0}$$

对所有粒子求和

$$(\Delta B)_{\text{particles}} = \sum \Delta B = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3 B_0}\sum T = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3 B_0} E_{\text{particles}}$$

前面已经算出

$$E_{\text{mag}} = \frac{4\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3 B_0^2}{3}$$

即

$$B_0 = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_E^3 B_0}$$

因此

$$\frac{(\Delta B)_{\text{particles}}}{B_0} = -\frac{2}{3}\frac{E_{\text{particles}}}{E_{\text{mag}}}$$

磁层粒子漂移

在向阳面，地球大气被太阳光电离，从而失去电子，逐渐带正电。在被阳面，地球大气从等离子体环境中获取电子 (因为等离子体中电子的速度比阳离子大很多)，逐渐带负电。在清晨，积累了最多的负电荷，而在黄昏积累了最多的正电荷，故地球周围存在一从晨侧指向昏侧的电场。假设其为长度 E_0 的匀强场，则电势为

$$\phi_{\text{晨昏}} = -E_0 r \sin\theta$$

θ 在正午为 0，午夜为 π。

共转电场

由于大气的黏性，近地等离子体层跟随地球自转。磁通量冻结条件要求地球磁场位形也随等离子体层旋转，根据之前讨论过的电磁场的 Lorentz 协变性，这在不随地球旋转的参考系中产生共转电场

$$\frac{d\phi_{\text{共转}}}{dr} = \frac{B_0 R_E^3}{r^3} \times \omega_E r$$

电势为

$$\phi_{\text{共转}} = -\frac{\omega_E B_0 R_E^3}{r}$$

总漂移速度

结合晨昏电场、共转电场、磁场梯度的作用，赤道面上粒子总漂移速度为

$$\mathbf{v_d} = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \left(\nabla\phi_{晨昏} + \nabla\phi_{共转} + \frac{3\mu B_0 R_E^3}{q r^4} \right)$$

考虑将梯度漂移项也写成 $\mathbf{B} \times \nabla(某个场)$ 的形式，有

$$\mathbf{v_d} = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \left(\nabla\phi_{等效} \right)$$

其中

$$\phi_{漂移} = \frac{\mu B_0 R_E^3}{q r^3}$$

$$\phi_{等效} = \phi_{晨昏} + \phi_{共转} + \phi_{漂移} = -E_0 r \sin\theta + \frac{\mu B_0 R_E^3}{q r^3} - \frac{\omega_e}{B_0} R_E^3 r$$

等离子体层

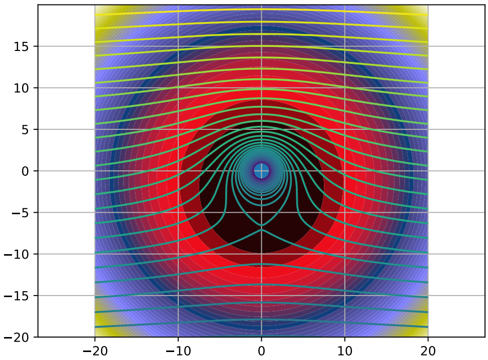
等离子体层是冷的，可以认为 $\mu = 0$。故

$$\phi_{\text{等效}} = -E_0 r \sin\theta - \frac{\omega_E B_0 R_E^3}{r}$$

赤道面上，漂移速度垂直于磁场，故速度矢量位于赤道面内。同时，漂移速度垂直于 $\nabla\phi_{\text{等效}}$，因此作 $\phi_{\text{等效}}$ 的等值线，即为速度方向。速度大小可以直接对 $\phi_{\text{等效}}$ 求梯度的大小，并除以 $|\mathbf{B}|$ 得到。存在一流速为 0 的点 (即等效电势的驻点)：

$$r = \sqrt{\frac{\omega_E B_0 R_E^3}{E_0}}, \theta = \frac{\pi}{2}$$

计算结果



图片来源：自制，见 src/plasmasphere.py。

热粒子的运动

考虑能量足够高的粒子，其梯度漂移项远大于共转项，故可以忽略共转项，有

$$\phi = -E_0 r \sin\theta + \frac{\mu B_0 R_E^3}{q r^3}$$

同样存在驻点使得流速为 0

$$r = \left(\frac{3\mu B_0 R_E^3}{|q| E_0}\right)^{\frac{1}{4}}, \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

θ 的符号与 q 相反。这说明高能粒子被捕获的区域比低能粒子大。

感谢观看！